



## STUDIO DEI SATELLITI DI GIOVE CON UN TELESCOPIO AMATORIALE

D. Trezzi

(datrezzi@alice.it)

01/02/2012, rev. 03/02/2012

### ABSTRACT

A poco più di quattrocento anni dalla scoperta dei quattro satelliti galileiani presentiamo in questo articolo la misura del loro periodo orbitale effettuata attraverso un telescopio di tipo amatoriale. Inoltre si riporta la verifica della terza legge di Keplero ed il calcolo della massa di Giove. Il lavoro si basa sulle misure effettuate da Briosco tra il 04/10/2009 ed il 26/10/2009.

### 1. Introduzione

Giove possiede 67 satelliti naturali [1] di cui i quattro maggiori: Io, Europa, Ganimede e Callisto, vennero osservati per la prima volta da Galileo Galilei nel 1610 e sono ben visibili attraverso strumenti astronomici amatoriali come piccoli riflettori o rifrattori. Tali satelliti, come tutti i corpi celesti, si muovono su orbite descritte dalla Teoria della Gravitazione Universale, formulata da Isaac Newton nel 1687. Consideriamo quindi il sistema formato da Giove e da uno dei suoi satelliti. Dato che il primo ha una massa molto più grande del secondo, allora il centro di massa del sistema si troverà praticamente al centro di Giove. Questo si traduce nella possibilità di considerare Giove praticamente "fermo" al centro del nostro sistema di riferimento ed il satellite in moto intorno a questo in perfetta analogia con il moto dei pianeti intorno al Sole. Il moto del satellite descrive, secondo le leggi di Newton un moto ellittico, dove Giove occupa uno dei due fuochi.

Per quanto riguarda le quattro lune principali di Giove: Io, Europa, Ganimede e Callisto i due fuochi praticamente coincidono e quindi il moto è sostanzialmente circolare. In ogni punto dell'orbita, il satellite si trova così in equilibrio tra due forze contrapposte. Da un lato, la *forza gravitazionale* tenderebbe a farlo cadere verso Giove dall'altro, essendo in moto circolare, su di esso si esercita la *forza centrifuga* che tenderebbe ad allontanare il satellite dal grande pianeta gassoso. L'espressione della forza gravitazionale  $F_g$  valutata alla distanza del satellite da Giove  $R$  (raggio medio orbitale), è data, in modulo, da:

$$F_g = G \frac{mM}{R^2} \quad (1)$$

dove  $m$  ed  $M$  sono rispettivamente le masse del satellite e di Giove e  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$  è una costante numerica nota come *costante di gravitazione universale*. La forza centrifuga  $F_c$ , valutata alla distanza del satellite da Giove  $R$ , è invece legata al modulo della velocità tangenziale  $v$  dalla relazione:

$$F_c = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

Ricordando ora che la velocità tangenziale è la velocità con cui il satellite descrive l'orbita circolare, facilmente riconducibile al raggio orbitale  $R$  ed al periodo orbitale  $T$  attraverso la relazione:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad (3)$$

Se ora poniamo la condizione di equilibrio  $F_g = F_c$  e sostituiamo le espressioni di  $F_g$  ed  $F_c$  possiamo calcolare  $v^2$ :

$$v^2 = G \frac{M}{R} \quad (4)$$



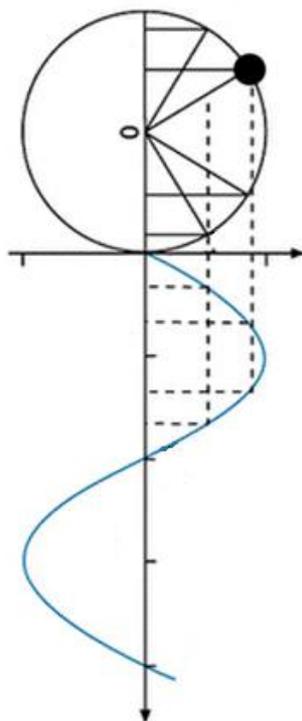
e ricordando che  $v$  è legato ad  $R$  dalla relazione  $v = 2\pi R/T$  otteniamo:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3 \quad (5)$$

nota anche come *terza legge di Keplero*, ovvero il quadrato del periodo orbitale  $T$  è direttamente proporzionale al cubo del raggio medio orbitale  $R$ . A questo punto ci chiediamo se è possibile sperimentalmente misurare il raggio ed il periodo orbitale. La risposta è ovviamente positiva, ma prima di procedere è necessario fare delle considerazioni sul moto circolare ed in particolare sul moto dei satelliti di Giove. Infatti i quattro satelliti maggiori hanno la caratteristica di avere il piano orbitale praticamente allineato con l'equatore del gigante gassoso. Questo fa sì che il moto appare come circolare se osservato esattamente da un punto posto all'infinito sull'asse di rotazione di Giove. Questa condizione non è però mai verificata da un osservatore terrestre. Durante il moto di rivoluzione intorno al Sole la Terra però può trovarsi in alcune posizioni "favorevoli" dove l'orbita circolare dei satelliti di Giove appare praticamente vista di taglio. I satelliti appariranno così muoversi di moto armonico intorno al grande pianeta gassoso seguendo una linea retta (piano orbitale). La massima distanza relativa dal pianeta sarà il raggio medio orbitale  $R$  e due punti a distanza massima verranno raggiunti dopo un tempo pari alla metà del periodo orbitale  $T$ . Proiettando il moto circolare su una retta come mostrato in figura 1, le equazioni del moto diventano:

$$x(t) = R \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) \quad (6)$$

dove  $x$  è la distanza lineare del satellite da Giove così come osservato da Terra ad un certo istante di tempo  $t$  e  $\phi$  è una fase arbitraria che tiene in considerazione il fatto che al tempo  $t = 0$  il satellite non si trovava necessariamente nel punto  $x(t = 0) = 0$ .



**Figura 1:** il moto circolare in due dimensioni può essere visto come la somma due moti armonici semplici monodimensionali. In figura, il satellite è raffigurato come un cerchio nero, mentre Giove si trova nell'origine degli assi 0.



A questo punto è possibile misurare la posizione  $x(t)$  del satellite rispetto a Giove giorno dopo giorno. Attraverso il fit dei dati sperimentali sarà così possibile ottenere il periodo orbitale  $T$  ed il raggio medio orbitale  $R$ .

## 2. Determinazione del periodo e del raggio medio orbitale

Nell'Ottobre del 2009 la Terra si trovava in una posizione favorevole per cui l'orbita dei quattro maggiori satelliti di Giove appariva perfettamente di taglio. Per quanto detto nel paragrafo 1, questo permette di descrivere la legge oraria, così come vista da Terra, attraverso l'equazione 6 e quindi estrarre il periodo ed il raggio medio orbitale dai dati sperimentali.

Durante tale mese, quando le condizioni meteorologiche lo hanno permesso, è stata acquisita l'immagine di Giove e dei quattro satelliti galileiani con una webcam Philips SPC 900NC equipaggiata con un filtro IR-Cut Astronomik al fuoco diretto di un rifrattore acromatico del diametro di 100 mm f/10, figura 2. Lo strumento dotato di montatura equatoriale alla tedesca New Polaris motorizzata in A.R. è localizzato a Briosco (coordinate: 45.724423 N,9.237805 E).



**Figura 2:** il rifrattore acromatico utilizzato per le riprese. Modello Antares Venere (anno 1998) diametro 100 mm f/10 su montatura New Polaris. Modifiche e motorizzazione in A.R. autocostruite.

La webcam ha prodotto un video AVI con risoluzione 640 x 480 per ciascuna ripresa. Successivamente i singoli frame sono stati elaborati con Registax4 al fine di ottenere una sola immagine BMP con maggior rapporto segnale rumore. Il frame rate è pari a 10 fps mentre il tempo di ripresa è di 50 secondi. Un esempio di immagine, così come appare elaborata con Registax4 è riportata in figura 3.



**Figura 3:** Immagine di Giove e tre galileiani ripresa il 24/10/2009 alle ore 20.16.57 T.U. I satelliti sono rispettivamente da sinistra a destra: Callisto, Io e Ganimede.

Successivamente ciascun file BMP è stato convertito attraverso un programma sviluppato in MATLAB in tre matrici numeriche corrispondenti ai valori in ADU assunti da ciascun pixel relativi ai canali R,G e B.

Dato che il sensore CCD della webcam è di tipo RGGB, si è deciso di utilizzare solo le informazioni relative al canale G, avendo maggiore statistica rispetto agli altri due canali.

La matrice numerica relativa al canale G è stata quindi implementata in ROOT al fine di ottenere, per ciascuna immagine le coordinate del centro del pianeta Giove e dei relativi satelliti. Assunto il moto rettilineo, la coordinata  $x(t)$  è stata calcolata come la distanza tra il centro di Giove e ciascun satellite. I dati sono riportati in tabella 1. Assumendo un profilo a gradino dell'immagine del satellite e propagando opportunamente gli errori si è ottenuto un errore medio sulla determinazione della posizione pari a 4 pixel. Il tempo  $t$  è stato calcolato come la differenza in secondi di ciascuna ripresa dalla prima, effettuata alle ore 19.48.51 locali del 04/10/2009.

Data ed ora acquisizione T.U.	Distanza da Giove $x$ (pixel)	Tempo $t$ (s)
	Io	
04/10/2009 19.48.51	79.85	0
07/10/2009 19.02.15	30.06	256404
10/10/2009 19.08.18	- 114.49	515967
11/10/2009 20.05.52	92.65	605821
12/10/2009 20.21.42	- 52.35	693171
16/10/2009 22.31.31	108.91	1046560



19/10/2009 18.35.11	- 101.55	1291580
24/10/2009 20.16.57	- 103.23	1729686
25/10/2009 21.41.54	101.86	1821183
26/10/2009 19.52.24	- 97.65	1901013
Europa		
04/10/2009 19.48.51	- 101.39	0
07/10/2009 19.02.15	- 185.40	256404
10/10/2009 19.08.18	- 91.24	515967
11/10/2009 20.05.52	- 124.87	605821
12/10/2009 20.21.42	154.67	693171
13/10/2009 19.58.08	64.03	778157
14/10/2009 18.30.38	- 166.05	859307
16/10/2009 22.31.31	161.04	1046560
19/10/2009 18.35.11	118.15	1291580
25/10/2009 21.41.54	- 144.36	1821183
26/10/2009 19.52.24	100.96	1901013
Ganimede		
04/10/2009 19.48.51	148.19	0
07/10/2009 19.02.15	-257.50	256404
10/10/2009 19.08.18	288.01	515967
11/10/2009 20.05.52	171.51	605821
12/10/2009 20.21.42	- 69.31	693171
13/10/2009 19.58.08	- 260.62	778157
14/10/2009 18.30.38	- 270.68	859307
16/10/2009 22.31.31	178.88	1046560
24/10/2009 20.16.57	268.80	1729686
25/10/2009 21.41.54	206.78	1821183
Callisto		
04/10/2009 19.48.51	281.15	0
07/10/2009 19.02.15	-271.54	256404
11/10/2009 20.05.52	- 438.98	605821
12/10/2009 20.21.42	- 310.44	693171
13/10/2009 19.58.08	- 144.12	778157
14/10/2009 18.30.38	28.64	859307
16/10/2009 22.31.31	376.44	1046560
19/10/2009 18.35.11	463.21	1291580
24/10/2009 20.16.57	- 303.21	1729686
25/10/2009 21.41.54	- 424.73	1821183
26/10/2009 19.52.24	- 477.12	1901013

**Tabella 1:** Dati sperimentali. La distanza da Giove è positiva quando i satelliti si trovano a ovest di Giove mentre diviene negativa quando sono a est.

I dati sono stati successivamente fittati con ROOT utilizzando come curva quella riportata in equazione 6 (si veda per esempio la figura 4). I risultati dei fit sono riportati in tabella 2.

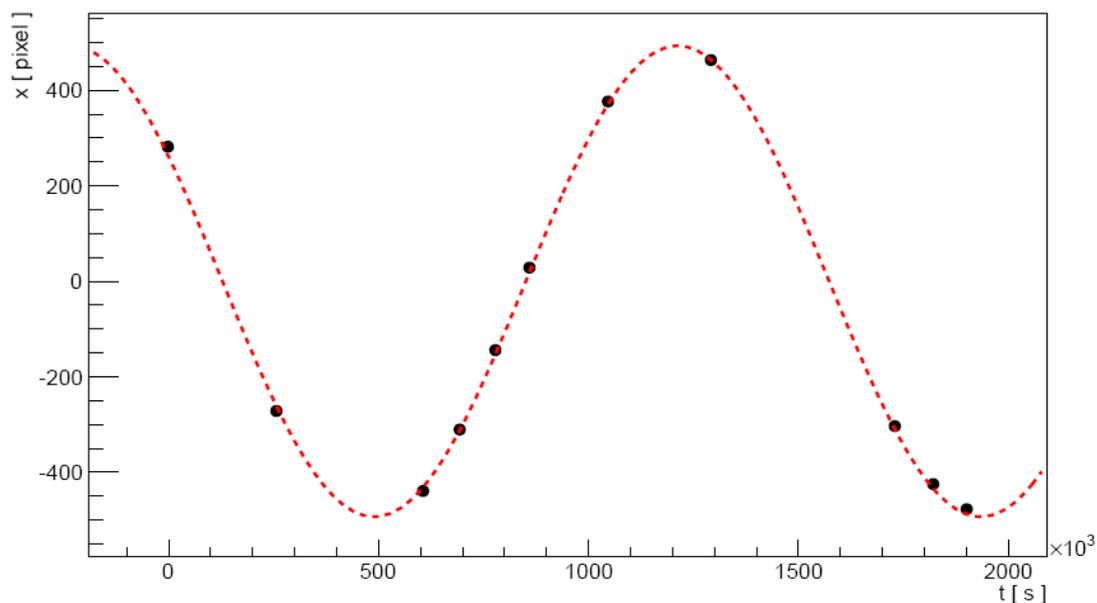


Figura 4: Esempio di fit sui dati sperimentali di Callisto.

Satellite	Periodo orbitale $T$ (s)	Periodo orbitale $T$ (s) [2]	Raggio medio orbitale $R$ (pixel)
Io	$152721 \pm 172.576$	152853.5047	$110.810 \pm 1.72568$
Europa	$306428 \pm 342.389$	306822.0384	$178.139 \pm 1.66524$
Ganimede	$616191 \pm 837.038$	618153.3757	$285.215 \pm 1.66564$
Callisto	$1445790 \pm 2435.25$	1441931.19	$495.708 \pm 2.10113$

**Tabella 2:** Periodo e raggio medio orbitale misurato sperimentalmente. Gli errori sono da considerarsi unicamente di tipo statistico. Nel caso del periodo orbitale si riporta per confronto il valore indicato in [2]. In tutti e quattro i casi la discrepanza tra il valore del periodo orbitale misurato e quello riportato in [2] si è sempre mantenuto inferiore allo 0.32%.

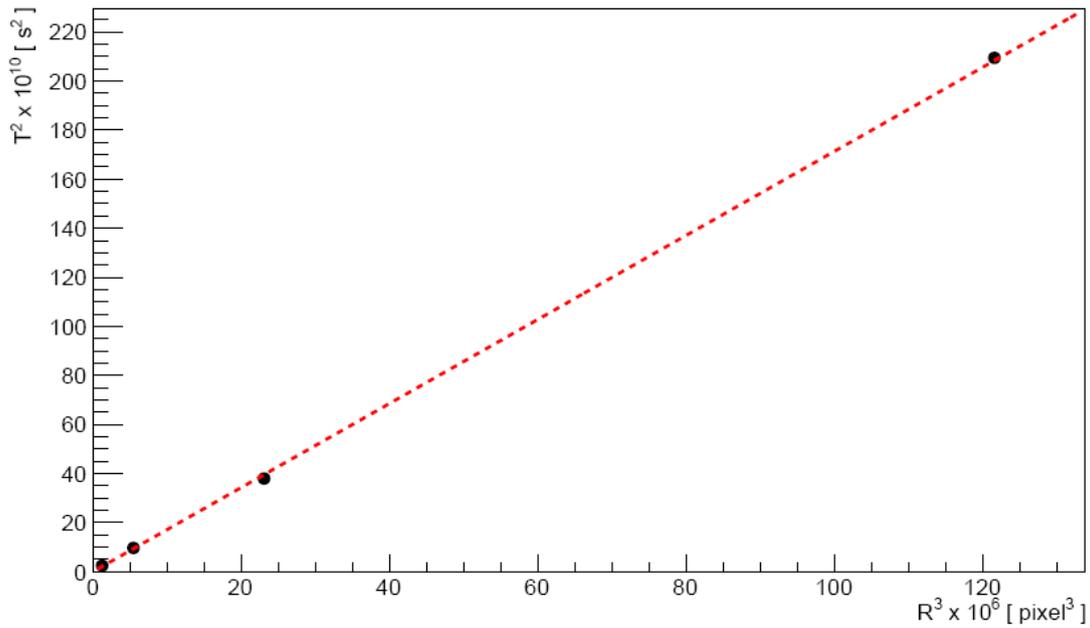
### 3. Verifica della terza legge di Keplero

Nel paragrafo 1 si è dimostrato come il quadrato del periodo orbitale  $T$  sia direttamente proporzionale al cubo del raggio medio orbitale  $R$ . Possiamo quindi riscrivere l'espressione (5) in una forma più semplificata:

$$T^2 = kR^3 \quad (7)$$

dove  $k$  è una costante numerica con dimensioni  $s^2 pixel^{-3}$  e nel nostro caso assume lo stesso valore per ogni satellite considerato. In figura 5 sono pertanto riportati i valori di  $T^2$  ed  $R^3$  calcolati precedentemente a partire dai dati sperimentali. Successivamente si è effettuato un fit lineare imponendo il passaggio dall'origine degli assi. Il valore di  $k$  così ottenuto è pari a  $(1.71317 \pm 0.0085456) \cdot 10^4 s^2 pixel^{-3}$  con un coefficiente di correlazione lineare  $R = 0.999923$ .

A questo punto, al fine di determinare la massa di Giove è necessario conoscere il fattore di conversione tra  $s^2 pixel^{-3}$  e  $s^2 m^{-3}$ . Per far questo misuriamo il raggio medio equatoriale e polare del pianeta e lo confrontiamo con il valore riportato in [2]. La media ottenuta tra i due fattori di conversione fornisce un rapporto pari a  $(2907.92 \pm 164.44) \cdot 10^3 m pixel^{-1}$ .



**Figura 5:** Sull'asse delle x è riportato il cubo del raggio medio orbitale  $R$ , mentre sull'asse delle y il quadrato del periodo orbitale  $T$ . La curva rossa rappresenta il fit lineare (equazione 7).

Data ed ora acquisizione T.U.	Diametro equatoriale (pixel)	Diametro polare (s)
04/10/2009 19.48.51	46	42
07/10/2009 19.02.15	45	41
10/10/2009 19.08.18	48	43
11/10/2009 20.05.52	49	45
12/10/2009 20.21.42	53	51
13/10/2009 19.58.08	53	50
14/10/2009 18.30.38	49	46
16/10/2009 22.31.31	57	53
19/10/2009 18.35.11	53	49
24/10/2009 20.16.57	48	43
25/10/2009 21.41.54	46	43
26/10/2009 19.52.24	46	43
Valore medio	$49.42 \pm 3.75$	$45.75 \pm 4.00$
Diametro di Giove [2]	142984 km	133709 km
Fattore di conversione	$2893.24 \pm 219.54 \text{ km pixel}^{-1}$	$2922.60 \pm 255.53 \text{ km pixel}^{-1}$

**Tabella 2:** Dati sperimentali del raggio equatoriale e polare di Giove nonché il fattore di conversione calcolato rispetto al valore riportato in [2].

Nel Sistema internazionale quindi la costante di proporzionalità è  $k = (6.9671 \pm 1.1825) \cdot 10^{-16} \text{ s}^2 \text{ m}^{-3}$ . A partire ora dall'equazione 5 e 7 possiamo calcolare la massa di Giove come:

$$M = \frac{4 \pi^2}{Gk} \quad (8)$$

ottenendo  $M = (8.495 \pm 1.442) \cdot 10^{26} \text{ kg}$ . Quanto ottenuto è circa la metà del valore riportato in [2] pari a  $M = 1.8986 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ . Tale discrepanza è dovuta sostanzialmente nell'incertezza ottenuta nella



determinazione del diametro di Giove, in quanto l'elevato tempo di esposizione così come il seeing, le aberrazioni cromatiche e il non perfetto inseguimento della montatura New Polaris non hanno permesso una buona determinazione del fattore di conversione  $m/pixel$ .

#### 4. Conclusioni

Nel seguente articolo abbiamo mostrato come sia possibile determinare il periodo orbitale dei satelliti galileiani e mostrare la veridicità della terza equazione di Keplero nonché misurare la massa di Giove utilizzando una strumentazione astronomica di tipo amatoriale. Un risultato migliore nella determinazione della massa di Giove si sarebbe potuto ottenere effettuando una ripresa del pianeta a minor tempo di esposizione e con una montatura più precisa della New Polaris.

Inoltre per i satelliti più interni (e quindi con minore periodo orbitale) come Io ed Europa, si sarebbe ottenuto un minor errore sul fit acquisendo più immagini nella stessa notte. Altre misure come la determinazione del raggio medio dei satelliti galileiani, la composizione chimica di alcuni di essi nonché la ripresa di Amalthea utilizzando la tecnica sviluppata da Rolf Wahl Olsen [3] sono in progetto per il futuro.

#### 5. Bibliografia

[1] <http://www.dtm.ciw.edu/users/sheppard/satellites/jupsatdata.html>

[2] <http://en.wikipedia.org>

[3] D. Gasparri, *Coelum Astronomia*, Gennaio 2012 pag. 28